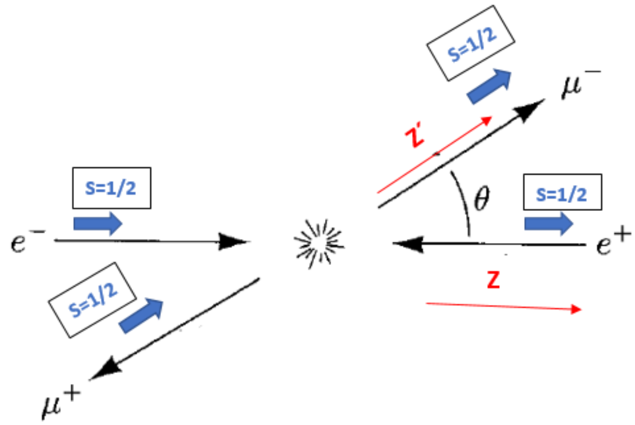
EJERCICIO (16:27)

Habiendo calculado Javier la amplitud de probabilidad de una colisión electrón-positrón que resulta en un muón-antimuón para las siguientes helicidades

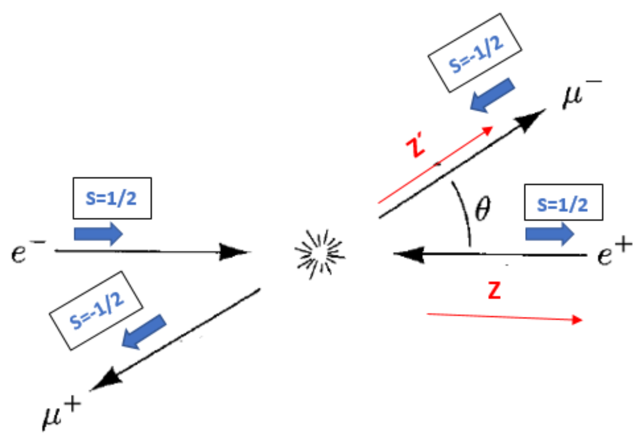
$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+} \sim -(\mathbf{1} + \cos\boldsymbol{\theta})$$



Calcular: $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+}$; $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+}$; $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+}$

---

1. $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+}$



$\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim \langle \mu_L^- \mu_R^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu \langle \gamma | H_I | e_R^- e_L^+ \rangle^\mu$

Calculamos $\langle \gamma | H_I | e_R^- e_L^+ \rangle^\mu$

Para $e_R^- e_L^+$ resulta una helicidad de +1, que debe ser la misma del fotón, por lo que éste puede ser descripto por:

$$\widehat{e_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - i\sin\phi \\ \sin\phi\cos\theta + i\cos\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Como el electrón, el positrón y el fotón se mueven sobre el eje z, entonces $\theta = 0$ y como ϕ puede tener cualquier valor, adoptamos un valor nulo. De modo que

$$\widehat{e_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para generar el cuadrimomento del fotón falta la componente temporal, pero como la polarización del fotón (en el eje z) debe ser nula en sus componentes temporal y longitudinal ponemos (no teniendo en cuenta la constante de normalización):

$$\widehat{e_{+1}} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\langle\gamma|H_I|e_R^- e_L^+\rangle^\mu \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\langle\mu_L^- \mu_R^+|H_I|\gamma\rangle_\mu$ hacemos antes $\langle\gamma|H_I|\mu_L^- \mu_R^+\rangle^\mu$

La helicidad resultante en este caso es -1, por lo que el fotón sería descripto por

$$\widehat{e_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi + i\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi - i\cos\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

En este caso el muón y el antimuón se mueven a lo largo de un eje z´que está inclinado un ángulo θ. Como hay simetría cilíndrica podemos tomar cualquier valor de ϕ, y adoptamos un valor nulo, resultando:

$$\widehat{e_{-1}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Para el cuadrimomento no podemos adoptar un valor temporal nulo, asumimos que es una constante C.

$$\widehat{e_{-1}} = \begin{pmatrix} C \\ \cos\theta \\ -i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\langle\gamma|H_I|\mu_L^- \mu_R^+\rangle^\mu \sim \begin{pmatrix} C \\ \cos\theta \\ -i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Para conseguir $\langle\mu_L^- \mu_R^+|H_I|\gamma\rangle_\mu$, primero transponemos y conjugamos:

$$\langle\mu_L^- \mu_R^+|H_I|\gamma\rangle^\mu \sim (C \quad \cos\theta \quad i \quad -\sin\theta)$$

Bajamos el índice, cambiando de signo las coordenadas espaciales

$$\langle\mu_L^- \mu_R^+|H_I|\gamma\rangle_\mu \sim (C \quad -\cos\theta \quad -i \quad \sin\theta)$$

Finalmente

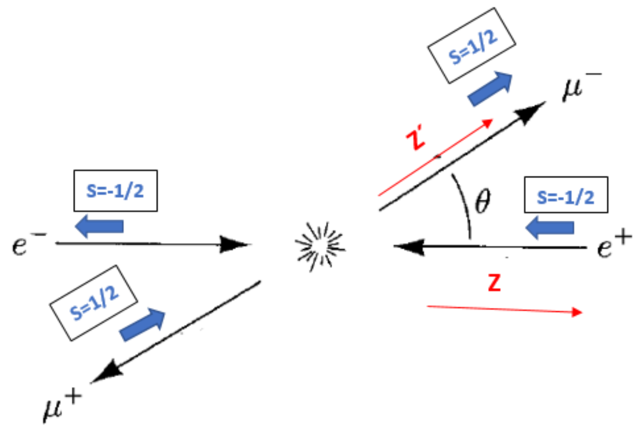
$\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim \langle \mu_L^- \mu_R^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu \langle \gamma | H_I | e_R^- e_L^+ \rangle^\mu$

$$\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim (C \quad -\cos\theta \quad -i \quad \sin\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - \cos\theta + 1 + 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim 1 - \cos\theta}}$$

---

2. $\boldsymbol{\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+}}$



Siguiendo un razonamiento similar al anterior:

$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+} \sim \langle \mu_R^- \mu_L^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu \langle \gamma | H_I | e_L^- e_R^+ \rangle^\mu$

Calculamos $\langle \gamma | H_I | e_L^- e_R^+ \rangle^\mu$

Para $e_L^- e_R^+$ resulta una helicidad de -1, por lo que el fotón sería descripto por:

$$\widehat{e_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi + i\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi - i\cos\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Como el electrón, el positrón y el fotón se mueven sobre el eje z, entonces $\theta = 0$ y como ϕ puede tener cualquier valor, adoptamos un valor nulo. De modo que

$$\widehat{e_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por el mismo razonamiento del caso anterior, el cuadrimomento sería:

$$\widehat{e_{-1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\langle\gamma|H_I|e_L^- e_R^+\rangle^\mu \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

Para calcular $\langle\mu_R^-\mu_L^+|H_I|\gamma\rangle_\mu$ hacemos antes $\langle\gamma|H_I|\mu_R^-\mu_L^+\rangle^\mu$

La helicidad resultante en este caso es +1, por lo que el fotón sería descripto por

$$\widehat{e_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - i\sin\phi \\ \sin\phi\cos\theta + i\cos\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

En este caso el muón y el antimuón se mueven a lo largo de un eje z´que está inclinado un ángulo θ. Como hay simetría cilíndrica podemos tomar cualquier valor de ϕ, y adoptamos un valor nulo, resultando:

$$\widehat{e_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ +i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Para el cuadrimomento no podemos adoptar un valor temporal nulo, asumimos que es una constante C.

$$\widehat{e_{+1}} \sim \begin{pmatrix} C \\ \cos\theta \\ +i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\langle\gamma|H_I|\mu_R^-\mu_L^+\rangle^\mu \sim \begin{pmatrix} C \\ \cos\theta \\ +i \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Para conseguir $\langle\mu_R^-\mu_L^+|H_I|\gamma\rangle_\mu$, primero transponemos y conjugamos, y luego bajamos el índice, cambiando de signo las coordenadas espaciales

$$\langle\mu_R^-\mu_L^+|H_I|\gamma\rangle^\mu \sim (C \quad \cos\theta \quad -i \quad -\sin\theta)$$

$$\langle\mu_R^-\mu_L^+|H_I|\gamma\rangle_\mu \sim (C \quad -\cos\theta \quad +i \quad \sin\theta)$$

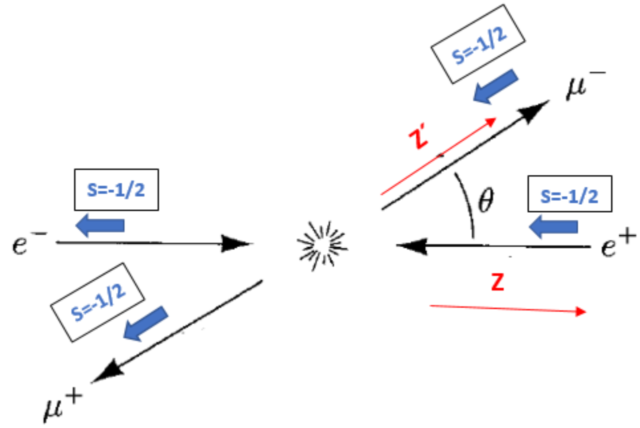
$$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^-\mu_L^+} \sim \langle\mu_R^-\mu_L^+|H_I|\gamma\rangle_\mu \langle\gamma|H_I|e_L^- e_R^+\rangle^\mu$$

$$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^-\mu_L^+} \sim (C \quad -\cos\theta \quad +i \quad \sin\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - \cos\theta + 1 + 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^-\mu_L^+} \sim 1 - \cos\theta}}$$

---

3. $\boldsymbol{\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+}}$



En este caso:

$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim \langle \mu_L^- \mu_R^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu \langle \gamma | H_I | e_L^- e_R^+ \rangle^\mu$

Ya calculamos en el ejercicio (2) $\langle \gamma | H_I | e_L^- e_R^+ \rangle^\mu$

$$\langle \gamma | H_I | e_L^- e_R^+ \rangle^\mu \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\langle \mu_L^- \mu_R^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu$ lo calculamos en el ejercicio (1)

$$\langle \mu_L^- \mu_R^+ | H_I | \gamma \rangle_\mu \sim (C \quad -\cos\theta \quad -i \quad \sin\theta)$$

$$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+} \sim (C \quad -\cos\theta \quad -i \quad \sin\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = 0 - \cos\theta - 1 + 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+} \sim -(1 + \cos\theta)}}$$